$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = r(n-r) + (m-r)(n-m), \qquad (10)$$

откуда число Картана $Q = \frac{1}{2} n(n+1)[r(n-r)+(m-r)(n-m)]$. Так как функции Λ^u_{pkj}, M^α_{ikj} симметричны по индексам k,j, их число $N = \frac{1}{2}(n+1)n[r(n-r)+(m-r)(n-m)]$. Таким образом, $Q=N$, и следовательно, система уравнений (5), определяющая $M(\Lambda)$-распределение в репере R^0, находится в инволюции.

Т е о р е м а . Двухсоставные распределения $H^r_m \subset P_n$ существуют с произволом в $r(n-r)+(n-m)(m-r)$ функций n аргументов.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр.геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1971,3,с.49-94.

2. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I.Калининградский ун-т, Калининград, 1984, 93с.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР, 2.07.1984, № 4481-84 Деп.)

3. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Проблемы геометрии.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР,7,1975,с.117-151.

4. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $H^r_m \subset P_n$.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14.Калининград,1983,с.111-115.

5. Шейдорова Н.М. О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.15.Калининград,1984,с.111-114.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

С.В.Ш м е л е в а

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОРОЖДЕННОЙ ФОКАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции D невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющие одну невырождающуюся фокальную поверхность (A_0) и одну вырождающуюся поверхность (A_3), описанную фокальными точками второго порядка. Доказано, что если (A_3)-линия, то существует пять и только пять попарно пересекающихся классов конгруэнций D. Точка A_3 для таких конгруэнций является двукратной фокальной точкой квадрики.

Отнесем конгруэнцию D к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, где A_0A_i, A_3A_i -прямолинейные образующие квадрики $Q\in D$ $(i,j,k=1,2)$. Квадрика Q задается уравнением:

$$F \equiv X^1X^2 - X^0X^3 = 0, \qquad (1)$$

причем конгруэнции D удовлетворяют следующей системе уравнений Пфаффа

$$\omega^3_0 = 0,\ \omega^0_3 = 0,\ \omega^j_i = a^j_{ik}\omega^k,\ \omega^3_i - \omega^j = c_{ik}\omega^k,$$
$$\omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_{ik}\omega^k,\ \omega^i_3 = b^i_k\omega^k,\ \Omega \equiv \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = h_k\omega^k, \qquad (2)$$

где

$$c_{12} = c_{21},\ \lambda_{12}b^1_1 - \lambda_{11}b^1_2 + \lambda_{22}b^2_1 - \lambda_{21}b^2_2 = 0, \qquad (3)$$

$\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0$, ω^β_α $(\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3)$ - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R.

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j

суммирование не производится.

Так как поверхность (A_3) вырождается в линию, то

$$\omega_3^i = t^i \vartheta, \qquad (4)$$

где ϑ -некоторая ненулевая форма Пфаффа. Обозначим:

$$\mathcal{F}_i = h_i X^1 X^2 - a_{ii}^j (X^i)^2 - a_{ji}^i (X^j)^2 + \lambda_{ki} X^k X^3 + c_{ki} X^k X^0, \qquad (5)$$

тогда

$$d\mathcal{F} = (2\theta - \omega_0^0 - \omega_3^3)\mathcal{F} + \mathcal{F}_k \omega^k, \quad \mathcal{D}\theta = 0. \qquad (6)$$

Т е о р е м а 1. Если поверхность (A_3) вырождается в точку, то она является фокальной точкой любого порядка $m \in N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ в разложении

$$\mathcal{F} + d\mathcal{F} + \frac{1}{2} d^2\mathcal{F} + \ldots + \frac{1}{k!} d^k \mathcal{F} \qquad (7)$$

не может возникнуть член с $(X^3)^2$. Следовательно, координаты точки A_3 обращают в нуль (7) при любом натуральном k.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathcal{D}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{D}$, у которой A_3 -неподвижная точка, A_0 -фокальная точка второго порядка, A_i -фокальные точки.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{D}_0$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{D}_0$ приводится к виду:

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_3^i = 0, \ \omega_i^j = 0, \ \omega_i^3 - \omega^j = 0,$$
$$\omega_i^0 = \lambda\omega^j, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \ d\ln\lambda + 2\omega_0^0 = 0. \qquad (8)$$

Чистое замыкание этой системы тождественно обращается в нуль. Следовательно, система (8) вполне интегрируема. Анализируя систему (8), убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Т е о р е м а 3. Конгруэнция $\mathcal{D}_0$ обладает следующими свойствами: 1/поверхность (A_0) является квадрикой с прямолинейными образующими A_0A_i; 2/фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_0, A_3 и пары пересекающихся фокальных прямых A_0A_i; 3/ поверхности вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются в точке $M = \lambda A_0 + A_3$; 4/касательные к любым соответствующим друг другу линиям на поверхностях (A_0) и (M) пересекаются в точке, лежащей на прямой A_1A_2.

Исключим в дальнейшем из рассмотрения случай вырождения поверхности (A_3) в точку, т.е. будем считать, что t^1 и t^2 в формулах (4) не обращаются в нуль одновременно. Выделяются три подкласса таких конгруэнций: конгруэнции $\mathcal{D}_i (t^i \neq 0, t^j = 0)$ и конгруэнции $\mathcal{D}_3$ $(t^1 t^2 \neq 0)$.

Так как A_3 -фокальная точка второго порядка, то

$$t^1 \lambda_{11} + t^2 \lambda_{21} = 0, \quad t^1 \lambda_{12} + t^2 \lambda_{22} = 0. \qquad (9)$$

Т е о р е м а 4. Существуют два и только два непересекающихся класса конгруэнций $\mathcal{D}_i$: конгруэнции $\mathcal{D}_i'$, определенные с произволом трех функций двух аргументов и конгруэнции $\mathcal{D}_i''$, определенные с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равноправия точек A_1 и A_2 достаточно ограничиться рассмотрением конгруэнций $\mathcal{D}_1 (t^1 \neq 0, t^2 \neq 0)$. Из (9) находим:

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = 0.$$

Тогда

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^0 = 0 \qquad (10)$$

Замыкая уравнения (10), получим

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^2 \wedge \omega_2^0 = 0. \qquad (11)$$

Рассмотрим сначала общий случай, когда

$$\omega_1^2 \neq 0. \qquad (12)$$

Тогда получим:

$$\omega_3^1 = \omega_1^2, \quad \omega_2^0 = p\,\omega_3^1, \quad \omega_3^3 + \omega_2^3 - 2\omega_1^1 = q\,\omega_3^1. \qquad (13)$$

Система (2),(10),(13)-в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}'_1$ с произволом трех функций двух аргументов.

Если

$$\omega_1^2=0, \qquad (14)$$

то уравнения (11) тождественно удовлетворяются. Замыкая (14), также получим тождество. Система (2),(10),(14) - в инволюции и определяет конгруэнцию $\mathcal{D}''_1$ с произволом пяти функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Касательная плоскость к поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}'_i$ содержит прямую A_jA_3; поверхность (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}''_i$ вырождается в прямую линию.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы

$$dA_i=\omega_i^i A_i+\omega_i^j A_j+\omega_i^3 A_3 \qquad (15)$$

и уравнений, характеризующих конгруэнции $\mathcal{D}'_i$ и $\mathcal{D}''_i$.

Т е о р е м а 6. Конгруэнции $\mathcal{D}_3$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{D}_3$ приводится к виду:

$$\begin{gathered}\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0,\ \omega_3^2-\omega_3^1=0,\ \omega_1^0+\omega_2^0-2\omega_3^1=0,\\ \omega_3^1=b_k\omega^k,\ \Omega=h_k\omega^k,\ \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k, \qquad (16)\\ \omega_1^0-\omega_3^2=\lambda_1\omega^1-\lambda_2\omega^2,\ \omega_i^j=a^j_{ik}\omega^k,\ \omega_2^2-\omega_1^1+\omega_1^2-\omega_2^1=2\omega_3^1,\end{gathered}$$

причем

$$b_2(2a^2_{11}+2a^1_{21}+\tau\lambda_1-2h_1)-b_1(2a^2_{12}+2a^1_{22}+\tau\lambda_2-2h_2)=0. \qquad (17)$$

Система (16),(17) - в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}_3$ с произволом пяти функций двух аргументов.

Т е о р е м а 7. Точка A_3 является двукратной фокальной точкой квадрики

$$Q\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3$$

и трехкратной фокальной точкой квадрики $Q\in\mathcal{D}''_i$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из условий кратности фокальной точки A_3.

С е м и н а р
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 31 мая 1983 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 12 октября 1983 года по 30 мая 1984 года.

12.10.1983г. Ю.И.П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры $H(M(\Lambda))$-распределения.

19.10.1983г. В.С.М и к у ц к и й. (г.Минск). Геометрический смысл φ -сопряженных связностей.

26.10.1983г. М.В.К р е т о в. О свойствах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.

2.11.1983г. Е.В.С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные кривой и плоскостью.

9.11.1983г. Е.П.С о п и н а. Конгруэнции гиперквадрик в A_n с фокальной конгруэнцией m -мерных квадрик.

16.11.1983г. Л.А.Ж а р и к о в а. Связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в аффинном пространстве.

23.11.1983г. Т.П.Ф у н т и к о в а. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов.

30.11.1983г. В.П.Ц а п е н к о. Аффинные связности, инвариантно присоединенные к специальному гиперкомплексу.

7.12.1983г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадратичных элементов.